Colles de Maths - semaine 14 - MP*1

Julien Allasia - ENS de Lyon

Probabilités

Exercice 1 Soit $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe une constante C et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{C}{k^\alpha}.$$

En considérant les événements $\{\{p \text{ divise } X\}, p \text{ premier}\}$, montrer que

$$\zeta(\alpha) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Exercice 2 Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont donnés par des variables aléatoires i.i.d. admettant une variance σ^2. Déterminer l'espérance de $\det X$ ainsi que sa variance dans le cas où les coefficients sont centrés.

Exercice 3 En utilisant des variables de Poisson, déterminer un équivalent de

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor an \rfloor} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a > 1$;
2. $\displaystyle\sum_{k=\lfloor an \rfloor}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a < 1$.

Exercice 4 Soit une famille $(X_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ une famille de variables de Bernoulli de paramètre p_n mutuellement indépendantes. On considère le graphe aléatoire de sommets $[\![1, n]\!]$, et d'arêtes $\{\{i, j\}, i < j \text{ et } X_{i,j} = 1\}$. Soit X_n le nombre de points isolés dans le graphe.
Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ dans les deux cas suivants :

1. $n\, p_n - \ln n \to +\infty$;
2. $n\, p_n \to a > 0$.

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalents :

(i) $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X_\infty)]$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_n \leqslant x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X_\infty \leqslant x)$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X_\infty = x)$.

Exercice 6 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $1 \leqslant p < q$. Montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv)$ et $(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v)$, où

(i) Convergence L^q : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^q] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(ii) Convergence L^p : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(iii) Convergence presque sûre : $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty) = 1$;

(iv) Convergence en probabilité : $\forall \delta > 0,\ \mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

(v) Convergence en loi : $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(X_\infty)]$.

On pourra justifier que dans *(iii)*, l'ensemble en argument est bien mesurable.

Exercice 7 On reprend les notations de l'exercice précédent. Supposons que (X_n) converge en probabilité vers X_∞.

1. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il existe une extractrice φ telle que $(X_{\varphi(n)})$ converge presque sûrement vers X_∞.
2. En déduire une preuve du fait que la convergence en probabilité implique la convergence en loi.

Exercice 8 On note X_n la variable aléatoire donnée par le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à supports disjoints d'une permutation de $[\![1, n]\!]$ (on compte aussi les points fixes) tirée uniformément au hasard.

1. Montrer que la fonction génératrice G_n de X_n vérifie
$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{G_n'(x)}{G_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}.$$
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Montrer que $\frac{X_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers 1, c'est-à-dire
$$\forall \delta > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\ln n} - 1\right| > \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Intégrales à paramètres

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose, pour $\alpha > 0$,
$$I(\alpha) = \left(\int_0^1 f(t)^\alpha \,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}.$$
Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers 0 et $+\infty$.

Exercice 10 Soit $a, b > 1$. Calculer
$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) \mathrm{d}x.$$

Exercice 11 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq 0$. Pour $t \geqslant 0$, on définit
$$g(t) = \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + tx}\,\mathrm{d}x.$$
Donner un équivalent en $+\infty$ de g.